Title	Überall kompakte Abbildung ニ就テ
Author(s)	小松, 醇郎
Citation	全国紙上数学談話会. 57 p.5-p.19
Issue Date	1935-09-13
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74120
rights	
Note	

198. Überall kompakte Abbildung ニ就テ

小 松 醇 郎（阪大）

0. Mannigfaltigkeit M ヲ μ ヘ Stetig ニ寫ス Abbildung f ($M \xrightarrow{f} \mu$) ヲ überall kompzkt トスル。

H. Hopf ノ Abbildungsgrad ノ Theorie (Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. II. Math. Ann. Bd. 102) ノ補筆デアルガ überall kompakt デナイ場合ハ後ノ機會ニ讓ル。

Abbildung f ガ nichtorientierbar 即チ M デ indikatrisumkehrender Weg ガ homotop 0 ニナル Weg ニ寫ルモノアルトキノ Abbildung ガ何故特別ナ地位ヲ占メルカニ對スルーツノ答ヘラシキモノガ與ヘ

ラレル。所ガ Abbildung f ガ orientierbar デアッテ indikatrixumkehrende Abbildung デアルトキ即テ Indikatrix ヲ変ヘル道ガ変ヘナイ道ニ，又ハ変ヘナイ道ガ変ヘル道ニ寫ルモノアルトキ、ソレハ著シイ性質ヲ持ツ、即チソノ Klasseninvariant トシテノ Absolutgrad ガ常ニ 0。

是等ハ唯 überlagerung ノ関係ヲ適用スルニ過ギナイ、特別ノ場合ハ Antipodentrene ab. 及ビ Antipodenstimmende ab. デアル。Hopf ニヨレバ任意ノ ab. ハ index 1 ノ ab. 及ビ überlagerung ナル ab. ノニツニ分解サレタガ尚進ンデ μ ガ常ニ einfachrusammenhängend ナ Mannigfaltigkeit ナル場合ニ帰着サレ而モ Absolutgrad ナル言葉ハ不要デ結局 Browver ノ意味ノ Classical ナ grad ト Parität トノニツニナル。

次ニ ab. f ノ Klasse ニ於テ μ ノ閉曲線ガ被ハレル（寫像サレル）ソノ mindeste Bedeckung ガ作ル Gruppe $\mathfrak{F}_2$ トスレバ $\mathfrak{F}_2$ ハ M ノ閉曲線ガ μ ヘ寫像サレテ作ル Gruppe $\mathfrak{F}_1$ ノ Obergruppe デアッテ $\mathfrak{F}_2$ ニ對スル $\mathfrak{F}_1$ ノ index ガ ab. f ガ作ル所謂 "Wesentliche Schichtenanrahl" デアル。然シ überall kompakt ナ Abbildung ニテハ grad ガ 0 デナイナラバ $\mathfrak{F}_2$ ハ μ ノ fundamentalgruppe

ニ一致シ grad ガ 0 ナラバ $\mathfrak{F}_2$ ハ $\mathfrak{F}_1$ ニ一致スル。

I. Indikatrixumkehrende Abbildung (i. u. A.)

Satz: M nichtorientierbar, μ Orientierbar ノトキハ、ソノ Absolutgrad ハ常ニ 0.

Beweis: M ノ Fundamentalgruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + i\mathfrak{H}, \quad i^2 \in \mathfrak{H}.$$

茲ニ i ハ Orientierung umkehrender Weg デアル、今コノ $\mathfrak{H}$ ヲ Fundamentalgruppe トスル Mannigfaltigkeit デ M ヲ regulär ニ überlagern スルモノ $\tilde{M}$ ヲ作ル。$\tilde{M}$ ハ Orientierbar デアル。

μ ノ Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$; f ニヨル $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{F}$ ヘノ homomorphe Abbildung φ トスル。

f ガ nichtorientierbar ナルタメニハ

$\varphi(i\mathfrak{H}) = \varphi(\mathfrak{H})$ ガ必要且ツ十分デアル。

f ガ Orientierbar ナラバ

$$\varphi(i\mathfrak{H}) \neq 1 \in \mathfrak{F}.$$

$$\varphi(i) \notin \varphi(\mathfrak{H})$$

故ニ

$$\varphi(\mathfrak{G}) = \varphi(\mathfrak{H}) + \varphi(i)\varphi(\mathfrak{H})$$

$$= \mathfrak{U} + \varphi(i)\mathfrak{U} = \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}.$$

$\mathfrak{F}_1$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ對スル index j トスレバ $\mathfrak{F}_1$ ヲ Fundamentalgruppe トスル μ ノ Überlagerungsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}^*$ ヲ作ル。ソコデ

$$M \xrightarrow{f} \mathcal{M}$$

ノ代リニ

$$M \xrightarrow{f^*} \mathcal{M}^*.$$

サテ $\mathfrak{F}_1$ ガ亦 index 2 ノ Klasseneinteilung セラレルノダカラ M カラ $\widetilde{M}$ ヲ作ツタト同様ニ $\mathcal{M}^*$ カラ $\widetilde{\mathcal{M}}^*$ ヲ作ル．此処デ f^* ヲ $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^*$ ノ $\widetilde{f}^*$ ニ擴張スル。

M ノ一点 x ニ對シ $\mathcal{M}^*$ ノ一点 $f^*(x) = \xi^*$ ガ對應スル、x ヲ überlagern スル $\widetilde{M}$ ノ二点 $\widetilde{x}, \widetilde{x}^*$，$\xi^*$ ヲ überlagern スル $\widetilde{\mathcal{M}}^*$ ノ二点 $\widetilde{\xi}, \widetilde{\xi}^*$ トスレバ先ヅ勝手ニ

$$\widetilde{f}^*(\widetilde{x}) = \widetilde{\xi}, \quad \widetilde{f}^*(\widetilde{x}^*) = \widetilde{\xi}^*$$

ト定メル、M ノ他ノ任意ノ点 y ニ對シ $f^*(y) = \eta^*$ トスレバ $\widetilde{f}^*$ ハ $\widetilde{y}, \widetilde{y}^*$ ガ $\widetilde{\eta}$，$\widetilde{\eta}^*$ ニ對應スルコトトナル。

x ト y トヲ結ブ一ツノ道 w ハ $\widetilde{M}$ デ $\widetilde{x}$ ト $\widetilde{y}$，$\widetilde{x}^*$ ト $\widetilde{y}^*$ ト結ブ二ツノ道 $\widetilde{w}, \widetilde{w}^*$ トナル。之レニ對應スルノハ $\widetilde{\mathcal{M}}^*$ デ $\widetilde{\xi}$ ト $\widetilde{\eta}$，$\widetilde{\xi}^*$ ト $\widetilde{\eta}^*$ トヲ結ブ二ツノ道デアル。從ツテ $\widetilde{x}, \widetilde{x}^*$ ト $\widetilde{\xi}, \widetilde{\xi}^*$ ト對應スル Paar ガ定メテアルナラバ、ソコヲ出發スル道ノ對應スル Paar ガ定マル。從ツテ

$$\widetilde{f}^*(\widetilde{y}) = \widetilde{\eta}, \quad \widetilde{f}^*(\widetilde{y}^*) = \widetilde{\eta}^*$$

ト決定サレル。サテ x ト y トヲ結ブ他ノ道 w' ヲ選ンダトスルト $w'w^{-1} \in \mathfrak{g}$ in M トスレバ

$\widetilde{w}', \widetilde{w}'^*$ ハ $\widetilde{x}$ ト $\widetilde{y}$；$\widetilde{x}^*$ ト $\widetilde{y}^*$ ト結ブ道ニナル。

又 $\varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}$，$\mathfrak{U}$ ハ $\widetilde{\mathcal{M}}^*$ ノ Fundamentalgruppe デ

アルカラ

$\tilde{w}', \tilde{w}'^{*}$ ニ對應スル道

$\tilde{f}^{*}(\tilde{w}'), \tilde{f}^{*}(\tilde{w}'^{*})$ ハ $\tilde{\xi}$ ト $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}^{*}$ ト $\tilde{\eta}^{*}$ トヲ結ブ道デアル。

$$\therefore\ \tilde{f}^{*}(\tilde{y}) = \tilde{\eta},\quad \tilde{f}^{*}(\tilde{y}^{*}) = \tilde{\eta}^{*}.$$

又 $w'w^{-1} \in i\mathfrak{z}$ in M トスレバ

$\tilde{w}', \tilde{w}'^{*}$ ハ $\tilde{x}$ ト $\tilde{y}^{*}$, $\tilde{x}^{*}$ ト $\tilde{y}$ ト結ブ道ニナル。

又 $\varphi(i\mathfrak{z}) = \varphi(i)\mathfrak{U}$ デアルカラ

$\tilde{f}^{*}(\tilde{w})\tilde{f}^{*}(\tilde{w}')^{-1}$; $\tilde{f}^{*}(\tilde{w}^{*})\tilde{f}^{*}(\tilde{w}'^{*})^{-1}$ ハ何レモ geschlossen デハナイ、故ニ

$\tilde{f}^{*}(\tilde{w}')$ ハ $\tilde{\xi}$ ト $\tilde{\eta}^{*}$, $\tilde{f}^{*}(\tilde{w}'^{*})$ ハ $\tilde{\xi}^{*}$ ト $\tilde{\eta}$ ト結ブ道デアル。

$$\therefore\ \tilde{f}^{*}(\tilde{y}) = \tilde{\eta},\quad \tilde{f}^{*}(\tilde{y}^{*}) = \tilde{\eta}^{*}.$$

以上デ $\tilde{M} \xrightarrow{\tilde{f}^{*}} \tilde{\mu}^{*}$ ガ im Grossen ニ eindeutig stetig ニ定マル.

$\tilde{M}$, $\tilde{\mu}^{*}$ 共ニ Orientierbar, 且ツ $\tilde{f}^{*}$ ハ überall kompakt, 故ニ $\tilde{f}^{*}$ ノ Absolutgrad ハ klassical ナ Browver ノ Abbildungsgrad ノ絶對値デアル。

所ガ ξ ノ Umgebung ノ grad ト ξ^{*} ノ Umgebung ノ Grad ト符号ガ反對ニナッテ居ル. 然モ之ハ

等符号ノ筈ダカラ 0 ノトキノミ可能、故ニ $\tilde{f}^*$ ノ Absolutgrad 0 デアル。 従ッテ Schichtenbeitrag 0. 従ッテ是ハ f^* ノ Schichtenbeitrag 凡テ 0 ヲ表ス。

扨テ元ノ Abbildung f ノ Absolutgrad ヲ考ヘルニ

j unendlich ナラバ f überall kompakt デアルカラ

必ズ f ノ Absolutgrad 0 デアル (Hopf).

又 j endlich ナラバ Absolutgrad ハ $j \times 0$ デ 0 デアル。

—— 以上 ——

上ノ証明ハ直テニ一般ノ Indikatrixumkehrende Abbildung ニ當テハメルコトヲ得ル。

M ノ geschlossen ノ道 w ト $f(w)$ ト Orientierung 異ルモノガ少クモ一ツ存在スルトキ f ハ (I. u. A.) ト云フ。

Satz: f ガ i. u. A. ナラバソノ Absolutgrad 常ニ 0.

Beweis:

a) M nichtorientierbar, μ Orientierbar ハ前ノ定理。

b) M Orientierbar, μ nichtorientierbar トスレバ μ ノ Gruppe $\mathfrak{F} = \mathfrak{U} + i\,\mathfrak{U}$, i indikatrixumkehrender Weg.

サテ $\varphi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{F}$

f i.u.A. デアルカラ $i \in \mathfrak{F}_1$.

zweite Isomorphiesatz ヨリ

$$\mathfrak{F}_1/[\mathfrak{J}_1, \mathfrak{U}] \quad \mathfrak{F}/\mathfrak{U}$$

$$\mathfrak{J}_1 = [\mathfrak{J}_1, \mathfrak{U}] + i\,[\mathfrak{J}_1, \mathfrak{U}]$$

Homomorphe Abbildung φ ニテ $[\mathfrak{J}_1, \mathfrak{U}]$ ニ移ル Urbild 凡テヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G} \approx \mathfrak{J}_1/[\mathfrak{J}_1, \mathfrak{U}]$$

$$\therefore \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G} + \varphi^{-1}(i)\,\mathfrak{G}.$$

M, μ^* 共ニ Fundamentalgruppe ガ index 2 ノ Klasseneintielung 可能ナノダカラ前ト同様ニ

$$\widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{f}^*} \tilde{\mu}^*$$

ヲ作レバ Orientierbar $\longrightarrow$ Orientierbar デ Absolutgrad 0.

c) M nichtorientierbar, μ nicht orientierbar トスレバ

$$\varphi(\mathfrak{G}) = \varphi(\mathfrak{G}) + \varphi(i)\,\varphi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{J}_1.$$

又 $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{U} + a\,\mathfrak{U}$.

此処ニ $a \in \varphi(\mathfrak{G})$ デ indikatrixumkehrender Weg トスル。

前ノ如クμ^*, $\tilde{M}$, $\tilde{\mu}^*$ヲ作レバ$\tilde{\mu}^*$ノFundamentalgruppe ハ $\mathfrak{g}(\mathfrak{z})$ デ $\tilde{\mu}^*$ ハ nichtorientierbar ($a \neq 1$ ノトキ).

Zweite Isomorphiesatz ニヨリ

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{z}) = [\mathfrak{U}, \mathfrak{g}(\mathfrak{z})] + a[\mathfrak{U}, \mathfrak{g}(\mathfrak{z})].$$

是ハ (b) ノ場合デアツテ既ニ證明ズミ。$\tilde{f}^*$ノ Absolutgrad 従ツテ f ノ Absolutgrad 0.

$a = 1$ ナラバ μ^* Orientierbar デ (a) ノ場合ニ帰スル。

又若シ $\mathfrak{g}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{g}(i)\,\mathfrak{g}(\mathfrak{z}_0) = a\mathfrak{U}$ ナラバ Abbildung f ハ i.u.A. デハナクナル。

—— 以上 ——

II. Antipodentrene u. Antipodenstimmende Abbildung u. Deformation. u. s. w.

M が fixpunktfrei ノ involutorische Selbstabbildung 即チ Ordnung 2 ノ topologische Abbildung auf sich ヲ持ツトキ對應スル二点 x, x^* ハ互ヒニ antipodisch, 又 $M \longrightarrow \mu$ ノ stetige Abbildung f ガ

$$f(x^*) = f(x)^*$$

ノトキ antipodentrene Abbildung ト言フ。

(Borsuk).

又

$$f(x^*) = f(x)$$

ノトキ antipodenstimmende Ab. ト言フ。

f nichtorientierbar ノトキ Absolutgrad unbestimmt, 之ヲ0ト考ヘレバ Antipodenstimmende Abbildung ノ Absolutgrad 常ニ even.

a. t. A. 及ビ a. s. A. ヲトニナラバ Absolutgrad ヲ求メルニ M nichtorientierbar ノ場合ハ考ヘナクテヨイコトニナル。前ノ如ク $\tilde{M}$ ナル Orientierbar ノ Überlagerungsmannigfaltigkeit ヲ考ヘル。即チ f i. u. A. デナイナラバ

$$M: \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{Z} + i\,\mathfrak{Z}, \qquad i^2 \in \mathfrak{Z}.$$

$$\mu: \quad \varphi(\mathfrak{G}) = \varphi(\mathfrak{Z}) + \varphi(i)\varphi(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}.$$

nichtorientierlung ノ道 $\varphi(i) \notin \varphi(\mathfrak{Z})$.

デアル. 此処デ前ノ如ク

$$\tilde{M} \xrightarrow{\tilde{f}^*} \tilde{\mu}^*$$

ヲ作レバ $\tilde{f}^*$ ハ Antipodentrene Abbildung. 此ノ Absolutgrad g トスレバ f ノソレハ jg デアル。

次ニ stetige Deformation デ定義スル Abbildungsklasse ノ代リニ尚特ニ a. s. D. 及ビ a. t. D. デ移リ得ル Abbildung ヲ Klasse ニマトメルコトガ出来ル。即チ f_0, f_1 ニツノ Antipodentrene Abbildung トシ Abbildung ノ stetiges Schar $f_t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ ガ存在シ、ソレハ t ニ拘ラズ常ニ f_t ガ

antipodentreue Abbildung ノトキ f_0, f_1 ハ同一ノ Klasse ニゾクシ然ラザルトキ異ル Klasse ニゾクスルトスル。

Antipodenstimmende Deformation ニヨル Klasse モ同様ニ定義スル。是等ノ Klasse ハ勿論普通ノ Abbildungsklasse 凡テニ表ハレルトハ限ラヌ。又一ツノ a.K. ノ中ニ二ツノ a.S. (又ハ a.t.) A. がアルトキソレハ互ヒニ stetige Deformation デハ移レルノダが a.S. D. (又ハ a.t. D.) デ移リ得ルトハ限ラナイ。例ヘバ

Satz. $2n$ dimension ノ球面 S^{2n} ヲ S^{2n} ニ antipodenstimmende ab. ヲナセバ Absolutgrad 常ニ 0. 故ニ皆一ツノ ab. Klasse ノ中ニハイルノダが a.S. D. デ Klasse ニ分ケルト二ツノ Klrsse ニ分レル。

是ハ Projektiver Raum ノ S^{2n} ヘノ ab. デアルカラ ab. Klasse ハ 2, 即チ Parität 0 及ビ 1 ノ奴デアル。

此ノ Satz ヨリ $M \xrightarrow{f} \mu$ ノ stetige ab. デ M nichtorientierbar ノ場合ハ全ク考ヘナクテ良イコトニナル, 即チ f i. u. A. デナイ場合ハ前述、又 f nichtorientierbar デナクテ i. u. A. ノトキハ(I)ノ定理, 又 f nichtorientierbar ノトキハ即チ Parität

デ Absolutgrad 不定ノ場合ダガ之レハ $\tilde{M}$ ヲ作リ $\tilde{M}$ ノ a.s.A. 及ビ a.s.D. ノ Klasse ノ問題ニ帰スル。

是ヲ一般ニスレバ

$M \xrightarrow{f} \mu$ ノ Gruppe ノ関係ハ

$$\varphi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}.$$

茲ニ $\mathfrak{G}$ ハ M ノ, $\mathfrak{F}$ ハ μ ノ Gruppe デアル。

$\varphi(\mathfrak{N}) = 1$ トスレバ

$\mathfrak{N}$ ヲ Gruppe ニ持ツ Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$
$\mathfrak{F}_1$ ヲ 〃 〃 〃 μ^*
1 ヲ 〃 〃 〃 $\tilde{\mu}^*$

カクテ f ヨリ $M \xrightarrow{f^*} \mu^*$ ヲ作リ次イデ

$\tilde{M} \xrightarrow{\tilde{f}^*} \tilde{\mu}^*$ ニ擴張スル。

$\tilde{f}^*$ ノ Grad g (Parität モ入レテ) ナラバ f^* ノ grad g, 従ッテ f ノ Grad jg デアル。

即チ f ガ nichtorientierbar ナラバ $\tilde{M}$ ガ nicht-orientierbar, f ガ Orientierbar ナラバ $\tilde{M}$ ガ Orientierbar, $\tilde{\mu}^*$ ハ常ニ einfachzusammenhängend デアル。

特ニ射影空間ノ射影空間ヘノ変換ヲ考ヘル。

ソノ Dimension 偶数ナラ Parität カ Grad 奇數デアル。

Dimension 奇数ナラ Grad 凡テノ自然數.

當然起ル問題ハソノ Ab. Klasse ガ Grad ニヨリ

Charakterise セラレルノデハナイカ？デアルガ
M, μ 共ニ Sphere $\tilde{M}$, $\tilde{\mu}$ ノ überlagerungsraum
ニシ、a.s. Def. 又ハ a.t. Def. ニヨル Klassen-
einteilung ヲ求メルコトニナル。試ミタガ無效。

定理. おいれる指標奇數ノ nichtorientierbar
Fläche ノ射影平面ヘノ Ab. ハ Parität カサモナクバ
Grad odd. デアル。(Ab. Grad デ Charakterise
セラレルノデハナイ)

Eulersche Charakteristik 奇數ト云フ條件
ハ indikatrix umkehrender Weg デ2倍スレ
バ Rand トナルモノノ存在ヲ表ス。

M ノ gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{z} + i\,\mathfrak{z}$

ガ $\varphi(\mathfrak{z} + i\,\mathfrak{z}) = 1$

及ビ $\varphi(\mathfrak{z}) = 1, \quad \varphi(i) \neq \varphi(\mathfrak{z})$

ハ夫々前ノ場合ト同様ニ論ゼラレ前者ハ Grad 0, 後者ハ
odd デアル。

然ラザル場合ハ $\mathfrak{G}$ ノ Untergruppe $\mathfrak{N}$

$$\varphi(\mathfrak{N}) = 1$$

$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ハ oder 2 ノ cychi Grup.

且ツ $\mathfrak{N}$ ニハ umkehrender Weg ガ含マル。

故ニ M ノ überlagerungsfläche $\tilde{M}$ ハ nicht-
orientierbar.

且ツ $\tilde{M} \xrightarrow{f} \tilde{\pi}$ ナル abbildung ガ作レル、之

ハ Antipodentreue ab. デ Abbildungs Klasse ハ二ツ。

此ノ Parität ガ，$M \to \mu$ ヘノ ab. Klasse ヲ Charakterise スルワケニハイカナイ。

高次元ニスル場合 Nichtorientierbare Mann. ハ必ズ2倍スレバ Rand トナル Orientierbare Mann. ガ存在スル故手数ヲ踏ンデユケバ同様ナ結果ヲ得ルデアラウ。

III. Gruppe $\mathfrak{F}_2$.（0. 參照）

$\mathfrak{F}_2$ ハ $\mathfrak{F}$ ノ Untergruppe，是ヲ fundamentalgruppe ニ持ツ Überlagerungsraum $\bar{\mu}$ ヲ作ル。

$$M \xrightarrow{f} \mu$$

ヲ $$M \xrightarrow{\bar{f}} \bar{\mu}$$ ニ擴張スル。

μ ノ二ツノ道 v_1, v_2 ガ mod. $\mathfrak{F}_2$ デ äquivalent ノトキ v_1, v_2 ハ $\bar{\mu}$ ノ一ツノ同一ノ点ヲ表ストスル。

從ッテ M ノ一点 z，$f(z) = \zeta \in \mu$ トシ

$\bar{f}(z) = \bar{\zeta} \in \bar{\mu}$ ヲ定メルナラバ

M ノ一点 x ニ對シ、z ト x ト結ブ任意ノ二ツノ道 W_1, W_2 ハ $f(W_1), f(W_2)$． μ デ ζ ト $\xi = f(x)$ ヲ結ブ道、

$$f(W_1)\, f(W_2)^{-1} = f(W_1 W_2^{-1})$$

是レハ閉曲線ノ寫像故勿論 $\mathfrak{F}_2$ ノ Gruppe ノ Element ヲ表ス。

$\therefore$ $f(w_1)$, $f(w_2)$ ハ mod $\mathfrak{F}_2$ äquivalent.

故ニ x ニ對シ $\bar{\mu}$ ノ唯一点 $\bar{\xi}$ ガ對應ス。

ab. $\bar{f}$ デ $\bar{\mu}$ ノ一点 $\bar{\xi} = f(x)$ トシ、$\bar{\xi}$ ト mod. $\mathfrak{F}_2$ デ äquivalent ナ点 $\bar{\xi}^*$, $\bar{\xi}^{**}$ 等ハ本質的ニハ M ノ Urbild ヲ持タナイ。Urbild ガアッタトシテモ $\bar{f}$ ノ Klasse ノ中デハ Urbild ヲナクスルコトガ出來ル。若シ $\bar{\xi}^*$ ノ Urbild ガドウシテモ消ヘナイナラバ $\bar{\xi}$ ト $\bar{\xi}^*$ ト結ブ道ガ M ノ Bild ノ中ニ存在スル。之ハ ab. f ニ移セバ μ ノ中ノ閉曲線ガ如何ニシテモ $f(M)$ ノ中ニ被ハレルコトトナリ、ソレガ $\mathfrak{F}_2$ ノ Gruppe ノ Element ノ中ニ這入ラヌト言フコトニ矛盾。

次ニ $\bar{\mu}$ ヨリ Gruppe $\mathfrak{F}_1$ ヲ fundamentalgruppe ニ持ツ Überlagerungsraum μ^* ヲ作リ

$$M \xrightarrow{f^*} \mu^*$$

ニ擴張スル。

假定ニヨリ $f^*(x) = \xi^*$ トスレバ ξ^* ト äquivalent ナ点ハ μ^* デハ index ($\mathfrak{F}_2$ ノ $\mathfrak{F}_1$ ニ對スル) ダケアル。

ソレヲ ξ^{**}, ξ^{***}, ---------- トスレバ、ソレハ皆 f^* デ Urbild ヲ持ツ、若シ持タネバ $\mathfrak{F}_2$ ノ假定ニ反スル。且ツ ξ^* ノ Urbild ト ξ^{**} ノ Urbild トハ Schicht ガ異ナル. 即チコノ index ノ数ダケノ Wesentliche Schicht ガアル。(ξ^* ノ Urbild ノ点ハ皆等シイ Schicht ノ点)

即チ Schichtenanzahl ノ問題ガ Algebraisch ノ問題ニナツタノデアルガ $\mathfrak{F}_2$ ヲ見出スコトハ難シイ、Überall Kompakt ナラ $\mathfrak{F}_2$ ハ $\mathfrak{F}_1$ カ $\mathfrak{F}$ カデアル。